MÜHAZİRƏ 1

n-ölçülü Evklid fəzası

n-ölçülü Evklid fəzasını simvolik olaraq R_n şəklində işarə edəcəyik. n-ölçülü Evklid fəzası nöqtələr və vektorlar adlanan elə iki növ kəmiyyətlər çoxluğuna deyilir ki, bu kəmiyyətlər arasında aşağıdakı 4 qrup aksiomlar ödənilsin.

I_{1^0} Heç olmasa bir nöqtə vardır (başqa sözlə, fəza boş deyildir).

I_{2^0} Müəyyən tərtibdə verilmiş A, B nöqtələrinə uyğun $\overrightarrow{AB}$ vektoru vardır (A nöqtəsi vektorun başlanğıcı, B isə sonu adlanır).

I_{3^0} Hər bir A nöqtəsi və $\vec{a}$ vektoru üçün elə bir B nöqtəsi var ki, $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ($\vec{a}$ və $\overrightarrow{AB}$ eyni vektorlar hesab olunur).

I_{4^0} Paraleloqram aksiomu: Əgər $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ isə onda $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

I qrup aksiomlarda nöqtələrlə vektorlar arasında əlaqə verilir.

II_{1^0} Hər bir $\vec{a}$ vektoru və λ həqiqi ədədi üçün elə bir $\vec{b}$ vektoru var ki, $\vec{b} = \lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$, burada $\vec{b}$ vektoruna $\vec{a}$ vektorunun λ həqiqi ədədinə hasili deyilir.

II_{2^0} Hər bir $\vec{a}$ vektoru üçün elə 1 ədədi var ki, $\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$.

II_{3^0} Vektorun ədədə vurulmasında ədədlərin toplanmasına görə paylaşdırma qanunu: $\vec{a}(\lambda_1 + \lambda_2) = \vec{a}\lambda_1 + \vec{a}\lambda_2$.

II_{4^0} $(\vec{a} + \vec{b})\lambda = \vec{a}\lambda + \vec{b}\lambda$

II_{5^0} Assosiativlik qanunu: $(\vec{a}\lambda_1)\lambda_2 = (\vec{a}\lambda_2)\lambda_1$

II qrup aksiomlarda vektorlar ilə ədədlər arasında əlaqə verilir.

III_{1^0} Xətti asılı olmayan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ vektorları vardır.

III_{2^0} Hər bir (n+1)-ci vektor $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x^i\vec{e}_i$

Şərtləşək ki, eyni bir indeks həm yuxarıda, həm də aşağıda rast gəlinirsə cəm işarəsi yazılmır:

$$\vec{x} = x^i\vec{e}_i$$

III qrup aksiomlara n ölçülü fəzanın ölçü aksiomları deyilir və bu aksiomlar vasitəsilə fəzanın ölçüsü müəyyənləşir. Maksimal sayda xətti asılı olmayan vektorların sayına fəzanın ölçüsü deyilir.

IV_{1^0} Hər bir $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektoru üçün elə λ ədədi var ki, $\lambda = (\vec{a}, \vec{b})$, λ-ya $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili deyilir.

IV_{2^0} $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (simmetrikdir)

IV_{3^0} $(\vec{a}, \vec{b}\lambda) = (\vec{a}, \vec{b})\lambda = (\vec{a}\lambda, \vec{b})$

IV_{4^0} $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ (paylaşdırma qanunu)

IV_{5^0} $(\vec{a},\vec{a}) \geq 0$, yəni vektorların skalyar kvadratı mənfi deyil. Burada bərabər 0 halı $\vec{a}$ vektorunun $\vec{0}$ halına uyğundur $(\vec{a},\vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

IV qrup aksiomlar vasitəsilə fəzanın metrikası müəyyənləşdirilir, yəni fəzaya məsafə anlayışı daxil edilir. Fəzada məsafə həmişə həqiqi ədəddir.

I-III qrup aksiomları ödəyən fəzaya xətti fəza və ya Afin fəza deyilir.

MÜHAZİRƏ 2

R_n fəzasında m-ölçülü müstəvilər

R_n fəzasında xətti asılı olmayan

$$\vec{a}_1 = \{a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n\}$$
$$\vec{a}_2 = \{a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^n\}$$
$$- - - - - - - - - - -$$
$$\vec{a}_m = \{a_m^1, a_m^2, \ldots, a_m^n\}$$

m dənə vektora baxaq, yəni:

$$(a_i^j) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m^1 & a_m^2 & \ldots & a_m^n \end{pmatrix} \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$$

matrisinin hər hansı m tərtibli minoru sıfırdan fərqli olmalıdır. Bu vektorları hər hansı bir radius vektoru $\vec{x}_0$ olan bir nöqtədən quraq. Belə vektor düzəldək:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t^1\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2 + \ldots + t^m\vec{a}_m \tag{1}$$

(1) şəklində düzəlmiş vektorların son nöqtələr çoxluğuna R_n fəzasının m ölçülü müstəvisi deyilir və (1) tənliyinə m ölçülü müstəvinin vektorial şəkildə tənliyi deyilir. Bu tənlikdəki $t^1,\ldots,t^m$-lər həqiqi parametrlərdir və m ölçülü müstəvinin nöqtəsini ifadə edirlər. Məsələn; $t^1,\ldots,t^m$-lərin hamısının eyni zamanda sıfır olması göstərir ki, m ölçülü müstəvi bir nöqtədən, yəni M_0 nöqtəsindən ibarətdir. Başqa sözlə, m ölçülü müstəvi nöqtəyə cırlaşır. $t^1,\ldots,t^m$-lərin başqa seçilmiş qiymətlərində m ölçülü sistemin müxtəlif nöqtələrini alarıq. Ona görə də, $t^1,\ldots,t^m$-lərə m ölçülü müstəvi nöqtəsinin koordinatları kimi də baxmaq olar.

Xüsusi halda, $m = n-1$ olarsa, onda:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t^1\vec{a}_1 + \ldots + t^{n-1}\vec{a}_{n-1} \tag{2}$$

Belə (2) vektorunun son nöqtələri çoxluğuna R_n fəzasının hipermüstəvisi deyilir. $m = 2$ olduqda:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t^1\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2 \tag{3}$$

ikiölçülü müstəvinin, $m = 1$ olduqda:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t^1\vec{a}_1 \tag{4}$$

düz xəttin vektorial şəkildə tənliyidir.

Hipermüstəvinin tənliyinin koordinatlarla yazılışını tapaq. Bunun üçün qəbul edək ki,

$$\vec{x} = \{x^1, \ldots, x^n\}; \quad \vec{x}_0 = \{x_0^1, \ldots, x_0^n\};$$
$$\vec{a}_1 = \{a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n\}$$
$$-------------$$
$$\vec{a}_{n-1} = \{a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, \ldots, a_{n-1}^n\}$$

$\vec{a}_i$ vektorlarının koordinatlarından düzələn (n–1) tərtibli minor sıfırdan fərqli olmalıdır (xətti asılı olmamazlığa görə)

(2) tənliyini koordinatlarla yazaq:

$$\{x^1, x^2, \ldots, x^n\} = \{x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\} + \{t^1 a_1^1, t^1 a_1^2, \ldots, t^1 a_1^n\} + \ldots + \{t^{n-1} a_{n-1}^1, \ldots, t^{n-1} a_{n-1}^n\} \quad \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x^1 = x_0^1 + t^1 a_1^1 + \ldots + t^{n-1} a_{n-1}^1 \\ -------------- \\ x^n = x_0^n + t^1 a_1^n + \ldots + t^{n-1} a_{n-1}^n \end{array} \right\} \tag{5}$$

$t^1, \ldots, t^{n-1}$ parametrlərini sistemdən yox edək:

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + u_0 = 0 \tag{6}$$

(5) sistemindən elə (n – 1) dənə tənlik götürək ki, onun determinantı sıfırdan fərqli olsun. Onda bu tənliklər sistemini Kronekker üsuluna görə həll edib $t^1, \ldots, t^{n-1}$-ləri taparıq və bu qiymətləri (5) sistemində yerdə qalan bir tənlikdə yerinə yazsaq, (6) tənliyini və ya:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i x^i + u_0 = 0 \tag{6$'$}$$

və ya $u_i x^i + u_0 = 0$ şəklində yaza bilərik. (6), (6′) tənliyinə hipermüstəvinin koordinatlarla tənliyi deyilir. u_i-lər a_i^j-lərin fəzası olacaq, u_i-lərə hipermüstəvinin tangensial koordinatları deyilir. Xüsusi halda, $u_0 = 0$ olarsa,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i x^i = 0 \tag{7}$$

başlanğıcdan keçən hipermüstəvi tənliyi olacaq. (5) sistemində qəbul edək ki, $n-1=m$. Onda (5) sistemində m dənə tənlik götürüb, yuxarıdakı qayda ilə həll edib $t^1, \ldots, t^m$-ləri taparıq, bunları yerdə qalan $(n-m)$ dənə tənliklərdə yerinə yazsaq, bu tənliklərin hər birisi (6) şəklində tənlik olacaq, yəni hər birisi hipermüstəvi olacaq. (6) şəklində $(n-m)$ dənə tənliklərin birgə baxılışına $(n-m)$ dənə hipermüstəvinin kəsişməsi kimi baxmaq olar. Deməli, m ölçülü müstəviyə $(n-m)$ dənə hipermüstəvinin kəsişməsi kimi baxmaq olar.

MÜHAZİRƏ 3

R_n fəzasının hərəkətləri

Fəzanın hərəkəti onun nöqtələri arasındakı elə uyğunluğa deyilir ki, bu uyğunluqda məsafə invariant qalsın, yəni $\mathrm{A} \to \mathrm{A}', B \to B'$ uyğun olarsa, $\rho(\mathrm{A}, B) = \rho(\mathrm{A}', B')$ olsun. Əgər $\mathrm{A} = B$ olarsa $\Rightarrow$ $\rho(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = \rho(B, B) = 0$. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, fəzanın hərəkəti qarşılıqlı birqiymətli uyğunluqdur. Bunun üçün əksini fərz edək.

Fərz edək ki, $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ başqa, $\mathrm{A} \to \mathrm{A}''$ nöqtəsi də uyğundur, belə ki, $\mathrm{A}' \neq \mathrm{A}''$ Onda hərəkətin tərifinə əsasən $\rho(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = 0, \rho(\mathrm{A}', \mathrm{A}'') \neq 0$. Ziddiyyət göstərir ki, əks fərziyyə doğru deyil, $\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A}'$, hərəkət qarşılıqlı birqiymətli uyğunluqdur.

Yoxlamaq olar ki, hərəkət nəticəsində fəzanın hipermüstəvisi hipermüstəvisinə keçər. Bunu yoxlamaq üçün hipermüstəvinin qeyd olunmuş iki nöqtədən eyni uzaqlıqda duran nöqtələr çoxluğu kimi baxılmasını xatırlayaq. Yəni, əgər qeyd olunmuş nöqtələr A, B-dirsə, hipermüstəviyə elə M nöqtələr çoxluğu kimi baxılır ki,

$$\rho(A, M) = |AM| = |BM| = \rho(B, M) \tag{1}$$

Qəbul edək ki, hərəkətdə $\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A}', B \leftrightarrow B', M \leftrightarrow M'$ və hərəkətin tərifinə görə $\rho(A, M) = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{A'M'}\right| = \rho(A', M')$, $\rho(B, M) = \left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{B'M'}\right| = \rho(B', M')$ olduğundan:

$$\rho(A', M') = \left|\overrightarrow{A'M'}\right| = \left|\overrightarrow{B'M'}\right| = \rho(B', M') \tag{2}$$

olar, yəni hipermüstəvini təyin edən M nöqtələr çoxluğu hərəkət nəticəsində başqa bir hipermüstəvini təyin edən M' nöqtələr çoxluğuna keçər. Başqa sözlə, hərəkət nəticəsində hipermüstəvi hipermüstəviyə keçər.

Məlumdur ki, hər bir m ölçülü müstəviyə $(n-m)$ dənə hipermüstəvilərin kəsişməsi kimi baxmaq olar. Hərəkətdə hipermüstəvilər hipermüstəvilərə keçdiyi üçün $(n-m)$ dənə hipermüstəvilərin kəsişməsi də $(n-m)$ dənə hipermüstəvilərin kəsişməsinə keçər, yəni hərəkət nəticəsində m ölçülü müstəvi m ölçülü müstəviyə keçər. Xüsusi halda, $m=1$ olduqda düz xətt düz xəttə, $m=2$ olduqda ikiölçülü müstəvi ikiölçülü müstəviyə və s. keçər.

Hərəkətdə düz xətt düz xəttə keçdiyindən hərəkət çevirməsi Afin çevirmədir, yəni:

$$y^i = \sum_j a^i_j x^j + b^i \tag{3}$$

və ya operator şəklində:

$$\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b} \tag{3'}$$

və $Det(a^i_j) \neq 0$. (3) və ya (3′) çevirmələri hərəkətin ümumi şəkildə çevirmələridir. A operatoru cırlaşmayan operatordur. $\vec{b} = \vec{0}$ olarsa, hərəkət çevirməsi:

$$\vec{y} = A\vec{x} \tag{4}$$

şəklinə düşər və (4) çevirməsi hər bir $\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \vec{0}$ sıfır vektoru sıfır vektora çevirər. Başqa sözlə, (4) çevirməsi koordinat başlanğıcını invariant saxlayar. Ona görə də, (4) çevirməsi bir nöqtəni (koordinat başlanğıcını) invariant saxlayan hərəkət çevirməsidir. Belə hərəkətə R_n fəzasının fırlanması deyilir. Koordinatlarla fırlanma:

$$y^i = \sum_j a^i_j x^j \tag{4'}$$

şəklində olar. Əgər A=E vahid operatordursa (3′) çevirməsi:

$$\vec{y} = E\vec{x} + \vec{b} = \vec{x} + \vec{b} \tag{5}$$

şəklinə düşər. Bu çevirməyə R_n fəzasının paralel köçürülməsi deyilir. Koordinatlarla aşağıdakı şəkildə olar:

$$y^i = x^i + b^i \tag{5'}$$

R_n fəzasının hərəkətinə paralel köçürülmə ilə fırlanmanın hasili kimi də baxmaq olar.

Hərəkət çevirməsinin parametrlərinin sayını tapaq. Məlumdur ki, (3) hərəkət çevirməsində (a^i_j) matrisi n^2 elementdən, b^i isə n elementdən ibarətdir. Deməli, hərəkət $n^2 + n = n(n+1)$ sayda parametrdən asılıdır. Asanlıqla hərəkətin asılı olmayan parametrlərinin sayını da tapmaq olar. Bunu tapmaq üçün hərəkətin xüsusi halı olan fırlanmaya baxaq. $\vec{y} = A\vec{x}$ Hərəkətdə məsafə saxlanıldığına görə $|\vec{y}| = |\vec{x}|$, başqa sözlə, $|\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 \Rightarrow (y^1_1)^2 + \ldots + (y^n_n)^2 = (x^1_1)^2 + \ldots + (x^n_n)^2$

$$\begin{gathered} y^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \ldots + a^1_n x^n \\ ------------------ \\ y^n = a^n_1 x^1 + a^n_2 x^2 + \ldots + a^n_n x^n \end{gathered}$$

$$\left.\begin{aligned} &(a^1_1)^2 + (a^2_1)^2 + \ldots + (a^n_1)^2 = 1 \\ &-------------- \\ &(a^1_n)^2 + (a^2_n)^2 + \ldots + (a^n_n)^2 = 1 \end{aligned}\right\}(6) \qquad \left.\begin{aligned} &a^1_1 a^1_2 + a^2_1 a^2_2 + \ldots + a^n_1 a^n_2 = 0 \\ &-------------- \\ &a^1_{n-1} a^1_n + \ldots + a^n_{n-1} a^n_n = 0 \end{aligned}\right\}(7)$$

(a^i_j) matrisinin elementləri üzərinə $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ dənə şərt qoyulmalıdır. Biz isə asılı olmayan parametrlərin sayını tapmalıyıq. Bunun üçün ümumi parametrlərin sayından asılı olanların sayını çıxırıq:

$$n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

MÜHAZİRƏ 4

ℓ indeksli psevdo-Evklid fəzası

R_n fəzasının aksiomatik quruluşuna uyğun olaraq ${}^{\ell}R_n$ fəzası elə nöqtələr, vektorlar çoxluğuna deyilir ki, o nöqtələr, vektorlar çoxluğu üçün R_n fəzasında olduğu kimi $I_{1^0-4^0}, II_{1^0-5^0}, III_{1^0,2^0}, IV_{1^0-4^0}$ ödənilsin və IV_{5^0} aksiomu aşağıdakı şəkildə olsun:

$$(\vec{a},\vec{a}) > 0, (\vec{a},\vec{a}) < 0, (\vec{a},\vec{a}) = 0$$

$$-(x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^{\ell})^2 + (x^{\ell+1})^2 + \ldots + (x^n)^2,$$

yəni kvadratik forma cırlaşmayan ℓ indeksli formadır. Qeyd edək ki, $\ell = 0$ olarsa, yəni mənfi toplananların sayı sıfra bərabər olarsa, ${}^{\ell}R_n = R_n$.

${}^{\ell}R_n$ fəzasında düz xətt, hipermüstəvi, ümumiyyətlə, m ölçülü müstəvi elə R_n-də olduğu kimi tərif olunur.

${}^{\ell}R_n$ fəzasında vektorun uzunluğu R_n-dəki kimi

$$|\vec{x}| = \left|\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\right|$$

şəklidə təyin olunur. ${}^{\ell}R_n$ fəzasının tərifindən (IV_{5^0})$\Rightarrow$vektorun skalyar kvadratı

$$(\vec{x},\vec{x}) > 0$$
$$(\vec{x},\vec{x}) < 0$$
$$(\vec{x},\vec{x}) = 0$$

üç şərtə tabe olmalıdır. Axırıncə şərt $x \neq 0$ halında da doğrudur. Ona görə də, ${}^{\ell}R_n$ fəzasında 3 növ vektorlar vardır: həqiqi, xəyali və "0" uzunluqlu vektorlar mümkündür.

${}^{\ell}R_n$ fəzasında özü sıfırdan fərqli olub, uzunluğu sıfra bərabər olan vektorlara bu fəzanın izotrop vektorları deyilir. Məlumdur ki, $(\vec{x},\vec{x}) = x^i x^j g_{ij}$.

$$g_{ij} = (\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} \pm 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

Yəni:

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_1) = -1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_1|^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_1| = i$$

$$-----------------------$$

$$(\vec{e}_\ell,\vec{e}_\ell) = -1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_\ell|^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_\ell| = i$$

$$(\vec{e}_{\ell+1},\vec{e}_{\ell+1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_{\ell+1}|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_{\ell+1}| = 1$$

$$-----------------------$$

$$(\vec{e}_n,\vec{e}_n) = 1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_n|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_n| = 1$$

Başqa sözlə, ${}^{\ell}R_n$ fəzasının bazis vektorlarını təyin edən

$$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_\ell,\vec{e}_{\ell+1},\ldots,\vec{e}_n$$

vektorlarından ℓ dənəsi xəyali uzunluqlu, yerdə qalanları isə həqiqi uzunluqludur.

${}^{\ell}R_n$ fəzasının bazislərinin ödədiyi (1) şərtinə həmin fəzada psevdo-ortonormallıq şərti deyilir.

${}^{\ell}R_n$ fəzasını təyin edən bazis vektorlardan bir xəyali uzunluqlu və bir həqiqi uzunluqlu vektorlarla xətti ifadə olunan vektorlar izotrop vektorlar olacaq. Məs: $\vec{e}_1 + \vec{e}_{\ell+1}$-ə baxaq. Yoxlamaq olar ki, $|\vec{e}_1 + \vec{e}_{\ell+1}| = 0$.

Doğrudan da, $\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_{\ell+1}, \vec{e}_1 + \vec{e}_{\ell+1}\right) = -1 + 1 = 0$.

Əgər ${}^{\ell}R_n$ fəzasında hər bir $\vec{x}$ vektoruna $i\vec{x}$ vektorunu uyğun tutsaq, $\vec{x} \to i\vec{x}$, onda $(\vec{x},\vec{x}) \to (i\vec{x},i\vec{x}) = -(\vec{x},\vec{x})$ uyğun olacaq. Bu uyğunluqdan sonra kvadratik formalara fikir versək, $(\vec{x},\vec{x})$ kvadratik forması ${}^{\ell}R_n$ fəzasının kvadratik formasıdırsa, $-(\vec{x},\vec{x})$ ${}^{n-\ell}R_n$ fəzasının kvadratik forması olacaqdır. Deməli, $\vec{x}\to i\vec{x}$ uyğun tutmaqla ${}^{\ell}R_n$ fəzasından ${}^{n-\ell}R_n$ fəzasına və tərsinə keçmək olar.

Bunun nəticəsində alınan ${}^{\ell}R_n$ və ${}^{n-\ell}R_n$ fəzalarına izomorf fəzalar deyəcəyik və ${}^{\ell}R_n \cong {}^{n-\ell}R_n$ kimi işarə olunur.

Ümumiyyətlə, ${}^{\ell}R_n$ fəzasının ℓ indeksi üzərinə aşağıdakı şərt qoyulur:

$$\ell \le \frac{n}{2}$$

MÜHAZİRƏ 5

Psevdo-Evklid fəzasında müstəvilər

${}^{\ell}R_n$ psevdo-Evklid fəzasında m ölçülü müstəvi, (n-1) ölçülü hipermüstəvi və birölçülü düz xətt, ikiölçülü müstəvi R_n-də olduğu kimi təyin olunur. Göstərmişik ki, ${}^{\ell}R_n$ fəzasında $|\vec{e}_1| = i,\ |\vec{e}_2| = i, \ldots, |\vec{e}_\ell| = i, |\vec{e}_{\ell+1}| = 1, \ldots, |\vec{e}_n| = 1.$ ${}^{\ell}R_n$ fəzasının m ölçülü müstəvisini təyin edən $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ vektorlarının müəyyən hissəsi həqiqi uzunluqlu, müəyyən hissəsi xəyali uzunluqlu ola bilər.

Hamısı həqiqi uzunluqlu olarsa, bazis vektorlar Evklid mənasında R_n fəzasını təşkil edər və belə m ölçülü müstəviyə Evklid mənasında m ölçülü müstəvi deyilir. Əgər bazis vektorların hamısı xəyali uzunluqlu olarsa,

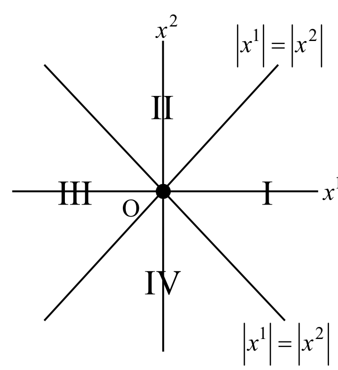
$${}^{m}R_m \cong {}^{m-m}R_m = {}^{0}R_m \cong R_m$$

olacaq. Əgər bazis vektorlardan $p<m$ dənəsi xəyali, yerdə qalanları həqiqi isə ${}^{p}R_m$ tipli psevdo-Evklid müstəvisi alarıq.

Deməli, ${}^{\ell}R_n$-də 2 tip: Evklid və psevdo-Evklid tip müstəvi var.

Qəbul edək ki, m=2, p=1. Yəni ${}^{1}R_2$ müstəvisinə baxaq. Aydındır ki, bu müstəvidə 2 dənə bazis vektor var: $|\vec{e}_1| = i,\ |\vec{e}_2| = 1.$ Bu müstəvidə

$$(\vec{x},\vec{x}) = -(x^1)^2 + (x^2)^2.$$



Məlumdur ki, $(\vec{x},\vec{x}) > 0$ həqiqi, $(\vec{x},\vec{x}) < 0$ xəyali, $(\vec{x},\vec{x}) = 0$ sıfır uzunluqlu vektorlar üçün $\Rightarrow$

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 > 0 \Rightarrow |x^1| < |x^2| \tag{1}$$

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 < 0 \Rightarrow |x^1| > |x^2| \tag{2}$$

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0 \Rightarrow |x^1| = |x^2| \tag{3}$$

Aydındır ki, ${}^{1}R_2$-də həqiqi, xəyali və sıfır uzunluqlu vektorların koordinatları uyğun olaraq (1), (2), (3)-ü ödəməlidirlər.

(1), (2), (3) riyazi şərtlərinin ${}^{1}R_2$-i nəzərə almadan R_2-də izahını versək, (1) şərti II, IV hissələrdə yerləşən vektorların koordinatları üçün doğrudur, (2) şərti I, III hissədə yerləşən, (3) şərti isə tənbölənlər üzərində yerləşən vektorların koordinatları üçün doğrudur. Başqa sözlə, ${}^1R_2$-in həqiqi, xəyali və sıfır uzunluqlu vektorları uyğun olaraq R_2-də II,IV; I, III hissələrdə və tənbölənlər üzərində yerləşən vektorlarla ifadə olunacaqlar.

MÜHAZİRƏ 6

R_n və ${}^{\ell}R_n$ fəzalarında hipersferalar

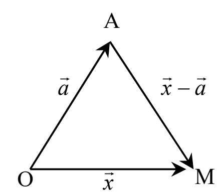
R_n və ${}^{\ell}R_n$ fəzalarında hipersferalar mərkəz adlanan nöqtədən eyni uzaqlıqda duran nöqtələr çoxluğuna deyilir. Əgər həmin fəzalarda mərkəz adlanan A nöqtəsinin radius vektorunu $\vec{a}$ ilə və bu nöqtədən eyni uzaqlıqda duran nöqtənin radius vektorunu $\vec{x}$ ilə işarə etsək, tərifə görə:

$$|\vec{x}-\vec{a}| = r, \quad |\vec{x}-\vec{a}|^2 = r^2,$$

$$(\vec{x}-\vec{a}, \vec{x}-\vec{a}) = r^2 \tag{1}$$

(1)-ə hər iki fəzada hipersferanın vektoru tənliyi deyilir. $\vec{a}=0$ olduqda, yəni hipersferanın mərkəzi koordinat başlanğıcında olduqda,

$$(\vec{x}, \vec{x}) = r^2 \tag{2}$$



Sadəlik üçün sonrakı işlərimizdə mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən hipersferadan danışacağıq. Əgər (2) hipersfera tənliyini $\vec{x}$ dəyişən vektoruna görə diferensiallasaq:

$$(d\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, d\vec{x}) = 0 \Rightarrow 2(d\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Rightarrow d\vec{x} \perp \vec{x}$$

Başqa sözlə, hipersferada cari nöqtənin radiusunun diferensialı hipersferanın radiusuna perpendikulyardır. Belə $d\vec{x}$ vektorları hipersferanın baxılan nöqtədə toxunan müstəvisini təyin edirlər. Əgər (2)-ni koordinatlarla yazsaq, R_n fəzası halında:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 = r^2 \tag{3}$$

${}^{\ell}R_n$ fəzası halında:

$$r = a, \quad -(x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^{\ell})^2 + (x^{\ell+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 = a^2 \tag{4}$$

$$r = q, \quad -(x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^{\ell})^2 + (x^{\ell+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 = -q^2 \tag{5}$$

$$r = 0, \quad -(x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^{\ell})^2 + (x^{\ell+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0 \tag{6}$$

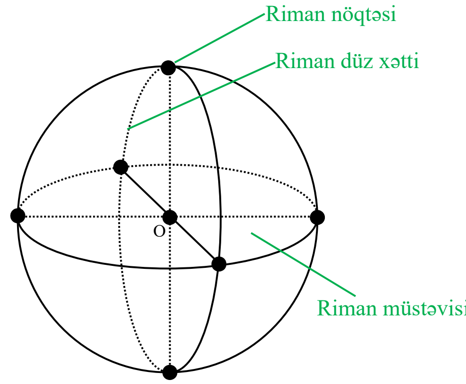
(3) tənliyi R_n-də r radiuslu hipersferanın tənliyidir; (4) tənliyi ${}^{\ell}R_n$-də həqiqi radiuslu, (5) tənliyi xəyali, (6) isə “0” radiuslu hipersferanın tənliyidir. (4), (5), (6) tənliklərini R_n fəzasında izah etmək üçün əvvəl xüsusi hal üçün: ${}^1R_3$ fəzası halı üçün hipersfera tənliklərini yazıb, onun R_3-də izahını verək:

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = a^2 \tag{7}$$

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -q^2 \tag{8}$$

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0 \tag{9}$$

(7), (8), (9)-a R_3-də baxılsa, bu tənliklər uyğun olaraq üçölçülü fəzanın birölçülü, ikiölçülü hiperboloidlərini və həqiqi konuslarını ifadə edəcəklər. Ona görə də, (4), (5), (6) tənliklərinə R_n fəzasında baxılarsa, bu tənliklər R_n fəzasının hiperboloidlərini və həqiqi konusunu ifadə edəcəklər. Deməli, ${}^{\ell}R_n$ fəzasının həqiqi, xəyali, sıfır radiuslu hipersferaları uyğun olaraq R_n fəzasının hiperboloidləri və hiperkonusları ilə ifadə olunacaqlar.



MÜHAZİRƏ 7

S_2 Riman müstəvisi

S_2 Riman müstəvisini almaq üçün R_3 fəzasında sferaya baxmalıyıq və bu sferanın qarşılıqlı diametran nöqtələrini eyniləşdirmək lazımdır. Belə bir eyniləşmədə sferanın bir yarım hissəsi digər hissəsinə inikas olunur. Deməli, baxılan modeldə Riman müstəvisi sferanın bir yarım hissəsini ifadə edir. Riman nöqtələri həmin yarımhissənin nöqtələrini ifadə edir. Riman düz xətləri həmin yarımhissədəki böyük yarımçevrələrlə ifadə olunur.

Riman müstəvisi ilə Evklid müstəvisinin fərqlərini sayaq:

1. Evklid müstəvisi ikiüzlü səthdir, Riman müstəvisi isə birüzlü səthdir. Doğrudan da, qarşılıqlı diametral nöqtələr eyniləşdirildiyindən, eyni nöqtə hesab olunduğundan Riman müstəvisində bir üzdən o birinə kəsilməz keçmək mümkündür, Evkliddə isə mümkün deyil.
2. Evklid müstəvisi sonlu sahəyə malik deyil, Riman müstəvisi isə sonlu sahəyə malikdir və sahəsi $2\pi r^2$-na bərabərdir.
3. Evklid müstəvisində düz xətt qapalı deyil, yəni düz xətti hər iki tərəfə sonsuz olaraq uzatmaq mümkündür, Riman müstəvisində isə düz xətt qapalıdır.
4. Evklid müstəvisində düz xətt sonlu uzunluğa malik deyil, Riman müstəvisində isə düz xətt sonlu uzunluğa malikdir və onun uzunluğu πr-ə bərabərdir.
5. Evklid müstəvisində istənilən iki düz xətt ortaq perpendikulyara malik deyil. Riman müstəvisində isə hər bir iki düz xətt ortaq perpendikulyara malikdir.
6. Evklid müstəvisində ixtiyari iki düz xətt ortaq nöqtəyə malik deyil. Riman müstəvisində isə ixtiyari iki düz xətt bir dənə ortaq nöqtəyə malikdir.

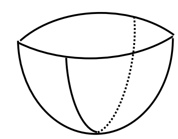
Bu xassədən $\Rightarrow$ Riman müstəvisində paralellik aksiomu ödənilmir $\Rightarrow$ Riman müstəvisində üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi $\neq 2d$. Digər tərəfdən Riman müstəvisində ixtiyari iki düz xətt ortaq perpendikulyara malik olduğundan, Riman müstəvisində elə üçbucaq var ki, onun iki daxili bucağı düz bucaqdır. Ona görə də, həndəsi olaraq belə nəticəyə gəlmək olar ki, Riman müstəvisində üçbucağın daxili bucaqları cəmi $2d$-dən böyükdür.

MÜHAZİRƏ 8

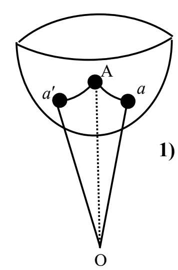
${}^{1}S_2$ Lobaçevski müstəvisi

${}^1S_2$ Lobaçevski müstəvisini almaq üçün ${}^1R_3$ fəzasının sferasını götürməliyik. Məlumdur ki, ${}^1R_3$-də 3 növ sferalar vardır: həqiqi, xəyali və “0” radiuslu sferalar. Həmin sferalar uyğun olaraq, Evklid fəzasında biroyuqlu, ikioyuqlu hiperboloidlərlə və konusla ifadə olunurlar.

Məlumdur ki, qeyri-Evklid fəzasının əyriliyi $\frac{1}{r^2}$ ifadəsilə təyin olunur, burada r-sferanın radiusudur. Əyrilikli qeyri-Evklid fəzalarından söhbət apardıqda $r \neq 0$ qəbul etmək lazımdır. Bu mənada 2 növ Lobaçevski müstəvisi mümkündür: “+” əyrilikli (radius həqiqi olduqda), “–” əyrilikli (radius xəyali olduqda) Lobaçevski müstəvisi vardır. Biz söhbətimizi “–” əyrilikli Lobaçevski müstəvisi halında aparacağıq. Deməli, “–” əyrilikli Lobaçevski müstəvisini qurmaq üçün R_3-dəki ikioyuqlu hiperboloidin qarşılıqlı diametral nöqtələrini eyniləşdirmək lazımdır. Belə işi gördükdə, aydındır ki, ikioyuqlu hiperboloidin bir hissəsi digər hissəsinə inikas olunur. Yəni “–” əyrilikli Lobaçevski müstəvisi ikioyuqlu hiperboloidin bir hissəsini ifadə edir. Hiperboloidin hər bir nöqtəsi də Lobaçevski nöqtəsi olacaq. Diametral müstəvinin ikioyuqlu hiperboloidin bir hissəsilə kəsişməsindən alınan xətt Lobaçevski düz xəttini ifadə edəcək.

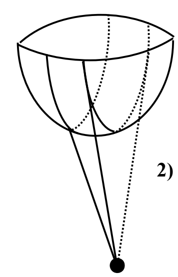


Məlumdur ki, Lobaçevski müstəvisində iki düz xəttin 3 növ qarşılıqlı vəziyyəti mümkündür: düz xətlər kəsişirlər, paraleldirlər və aralanandırlar (dağılandırlar).

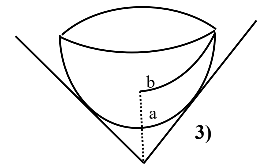


1)

Lobaçevski müstəvisindəki düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyətini bu modeldə izah edək. Bunun üçün Lobaçevski müstəvisində ikioyuqlu hiperboloidin bir hissəsini götürək. Müəyyən A nöqtəsində kəsişən iki a və a' Lobaçevski düz xətlərini götürək. a və a' düz xətlərinə uyğun olan diametral müstəviləri quraq. Qurduğumuz diametral müstəvilərin kəsişmə xətti olan OA xətti sferanı A nöqtəsində kəsir. Buna əsasən biz bu modeldə kəsişən düz xətləri aşağıdakı kimi izah edə bilərik:


2)

Əgər düz xətlərə uyğun olan diametral müstəvilərin kəsişmə xətti sferanı hər hansı bir nöqtədə kəsirsə, belə 2 Lobaçevski düz xəttinə bu modeldə *kəsişən (görüşən) düz xətlər* deyilir. Əgər düz xətlərə uyğun olan diametral müstəvilərin kəsişmə xətti sferanı heç bir nöqtədə kəsməzsə, belə düz xətlərə bu modeldə *aralanan (dağılan) düz xətlər* deyilir. Əgər düz xətlərə uyğun olan diametral müstəvilərin kəsişmə xətti sferanın asimptotu boyunca yönələrsə, belə 2 düz xəttə bu modeldə *paralel düz xətlər* deyəcəyik.



3)

Lobaçevski həndəsəsinin müəyyən fikirlərini də bu modeldə izah etmək olar. Məs: Lobaçevski müstəvisində iki nöqtədən yalnız və yalnız bir düz xətt keçər.

Lobaçevski müstəvisində 3 növ sabit əyrilikli əyrilər vardır. Bu əyrilər uyğun olaraq, çevrə,orisikl və ekvidistantadır.

Lobaçevski müstəvisində iki düz xəttin 3 növ qarşılıqlı vəziyyəti olduğundan Lobaçevsi müstəvisində 3 növ düz xətlər dəstəsi mümkündür.

1) nöqtədə kəsişən düz xətlər dəstəsi (elliptik dəstə)
2) aralanan düz xətlər dəstəsi (hiperbolik dəstə)
   İsbat olunur ki, aralanan düz xətlərin ortaq perpendikulyarı var.
3) Müəyyən istiqamətdə paralel düz xətlər dəstəsi (parabolik dəstə)

Bu dəstələrin ortoqonal trayektoriyalarına uyğun olaraq, Lobaçevski müstəvisində çevrə, ekvidistanta və orisikl deyirlər.

MÜHAZİRƏ 9

S_n, ${}^{\ell}S_n$ fəzalarının hərəkətləri

Hər bir fəzanın hərəkəti onun nöqtələri arasındakı elə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğa deyilir ki, uyğun nöqtələr arasındakı məsafə invariant qalsın və yaxud S_n, ${}^{\ell}S_n$ fəzalarının hərəkətləri onun nöqtələri arasındakı elə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğa deyilir ki, bu uyğunluqda S_n, ${}^{\ell}S_n$ fəzalarının məxsus oblastı məxsus oblasta, ideal oblastı ideal oblasta keçsin.

Əgər qeyri-Evklid fəzalarının hərəkətlərini təyin edən uyğunluqda məxsus oblast ideal oblasta və tərsinə keçərsə belə uyğunluğa qeyri-Evklid fəzalarının antihərəkəti deyilir.

Bu iki tərif halını birləşdirək: Qeyri-Evklid fəzalarının absolyutunu invariant saxlayan uyğunluğa həmin fəzaların hərəkətləri deyilir. Qeyri-Evklid fəzalarının R_{n+1}, ${}^{\ell}R_{n+1}$ fəzalarında götürülmüş bağlı düz xətlərilə modelindən uyğunluq qarşılıqlı birqiymətli olması üçün $\Rightarrow$ qeyri-Evklid fəzalarını yeni növ nöqtələrlə tamamlamaq lazımdır. Bu növ nöqtələr ideal nöqtələr olacaq. Qeyri-Evklid fəzalarının ideal nöqtələrlə tamamlanmasına genişlənmiş qeyri-Evklid fəzaları deyəcəyik. Məlumdur ki, qeyri-Evklid fəzalarının baxdığımız modeldə hərəkətləri R_{n+1}, ${}^{\ell}R_{n+1}$ fəzalarında götürülmüş hipersferaların fırlanmaları ilə müəyyən olunur. Ona görə də $(n+1)$ ölçülü Evklid, psevdoevklid fəzalarında nə qədər fırlanma verilərsə bir o qədər də qeyri-Evklid fəzalarının hərəkətləri mümkündür.

S_n *qeyri-Evklid fəzasının hərəkətlər təsnifatı:*

Məlumdur ki, S_n fəzasının hərəkəti R_{n+1} fəzasında hipersferanın fırlanması ilə müəyyən olunur. Hər bir fırlanmanın matrisinin normal Jordan forması var və bu forma aşağıdakı kimidir.

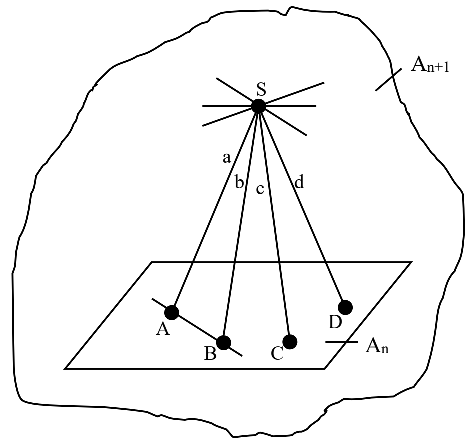
$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&& \\ &&&&& -1 &&&& \\ &&&&&& A_0 &&& \\ &&&&&&& A_1 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& A_k \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Burada

$$\mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega i}{r} & -\sin\frac{\omega i}{r} \\ \sin\frac{\omega i}{r} & \cos\frac{\omega i}{r} \end{pmatrix}, i = \overline{0,k}$$

şəklində şəbəkə matrisidir. Deməli, nə qədər normal Jordan (1) forması varsa, bir o qədər S_n fəzasının hərəkəti vardır.

Xüsusi hallara baxaq. Əgər Jordan forma $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ şəklində olarsa, bu eyni çevirmədir, əgər $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ olarsa, $(n-1)$ ölçülü müstəviyə nəzərən əksetmədir.



${}^{\ell}S_n$ fəzasının hərəkətlər təsnifatı:

Aşkardır ki, ${}^{\ell}S_n$ fəzasının hərəkətləri ${}^{\ell}R_{n+1}$ fəzasının fırlanmaları ilə müəyyənləşir. ${}^{\ell}R_{n+1}$ fəzasının hər bir fırlanmasının aşağıdakı kimi normal Jordan forması var.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & & \\ & & & & & & \mathrm{A}_0 & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & \mathrm{A}_k & & & \\ & & & & & & & & & \mathrm{B}_0 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & \mathrm{B}_{\ell} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Burada

$$\mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega i}{r} & -\sin\frac{\omega i}{r} \\ \sin\frac{\omega i}{r} & \cos\frac{\omega i}{r} \end{pmatrix}, i = \overline{0,k}$$

$$\mathrm{B}_j = \begin{pmatrix} ch\frac{\omega j}{q} & -sh\frac{\omega j}{q} \\ sh\frac{\omega j}{q} & ch\frac{\omega j}{q} \end{pmatrix}, j = \overline{0,\ell}$$

şəbəkə matrisləridir, $\omega i, \omega j$-lar sferik məsafələrdir. Nə qədər (1) şəklində normal Jordan forma varsa, bir o qədər də ${}^{\ell}S_n$ fəzasının hərəkətləri mümkündür.

MÜHAZİRƏ 10

n-ölçülü proyektiv fəza

P_n proyektiv fəzasını qurmaq üçün A_{n+1} afin fəzasında hər hansı bir A_n hipermüstəvisi və bunun xaricində götürülmüş S nöqtəsi götürək. S nöqtəsindən çıxan bütün mümkün olan bağlı düz xətlərinə baxaq. S bağlı mərkəzindən keçən düz xətlərin A_n hipermüstəvisi ilə kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq A, B, C, D, ... ilə işarə edək və həmin A, B, C, D, ... nöqtələrinə a, b,c, d, ... düz xətlərinə uyğun nöqtələr deyək.

Aşkardır ki, S nöqtəsindən çıxan və hipermüstəvini kəsməyən başqa düz xətlər də vardır və belə S-dən çıxan A_n-i kəsməyən düz xətlər öz növbəsində bir A_n hipermüstəvisi yaradır ki, bu hipermüstəvi S-dən keçib verilmiş hipermüstəviyə paraleldir. Aşkardır ki, S nöqtəsindən çıxan bağlı düz xətlər ilə A_n hipermüstəvisinin nöqtələri arasındakı uyğunluq qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq olmayacaq. Bu uyğunluğu qarşılıqlı birqiymətli etmək üçün S-dən çıxan və A_n-i kəsməyən bağlı düz xəttinə A_n hipermüstəvisi üzərində sonsuz uzaqlaşmış nöqtə uyğun tutaq. Aşkardır ki, bu qayda ilə tutulmuş sonsuz uzaqlaşmış nöqtələr çoxluğu A_n hipermüstəvisi ilə S-dən keçən və A_n-ə paralel olan hipermüstəvinin kəsişməsi üzərində yerləşəcək. Belə bir qarşılıqlı birqiymətli uyğunluqda olan A_n hipermüstəvisinə n-ölçülü P_n proyektiv fəzası deyəcəyik.

Belə qayda ilə qurulmuş P_n fəzası nöqtəsinin proyektiv koordinatlarını təyin edək. Bunun üçün A_{n+1}-də S nöqtəsindən çıxan hər bir düz xətt boyunca bir $\vec{x}$ radius-vektorunu yönəldək.

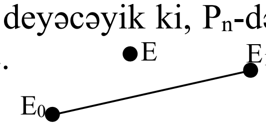
Aydındır ki, $\vec{x} = \{x^0, x^1, \dots, x^n\}$ (n+1) dənə afin koordinata malikdir, çünki A_{n+1}-də baxırıq. Bilirik ki, $\vec{x}$ vektorunun koordinatları həm də onun son nöqtəsinin koordinatlarıdır. Son nöqtəsini M ilə işarə etsək, $M(x^0, \dots, x^n)$ olacaq. A_n üzərində yerləşməklə $k \cdot \vec{x}$ vektoruna baxaq. $k \cdot \vec{x} = \{kx^0, kx^1, \dots, kx^n\}, k \neq 0$. $\vec{x}$ və k$\vec{x}$ kollinear olduğundan $\Rightarrow$ bir düz xətt üzərində yönəlir $\Rightarrow M(kx^0, \dots, kx^n)$.

Deməli, P_n-in hər hansı M nöqtəsinin koordinatları (n+1) dənə $x^0, \dots, x^n$ ədədləri ilə yox, bir sinif (n+1) sayda $kx^0, \dots, kx^n$ ədədləri ilə ifadə olunur. Ona görə də nöqtənin proyektiv koordinatları dedikdə (n+1) dənə ədəd yox, $M(x^0, x^1 \dots, x^n)$ başa düşəcəyik. Hamısı sıfır olmayan belə ədədlərin nisbətinə P_n-də nöqtənin proyektiv koordinatları deyəcəyik. Bu modeldəki proyektiv koordinat sistemini izah edək (A_{n+1}-də $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n$ bazisi var). Qəbul edək ki,

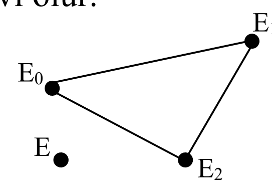
$$\vec{x} = \vec{e}_0 = \{1,0,0,\dots,0\}$$
$$\vec{e}_1 = \{0,1,0,\dots,0\}$$
$$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$
$$\vec{e}_n = \{0,0,0,\dots,1\}$$

koordinatları ilə təyin olunur. Onda $\vec{e}_0$ vektoruna uyğun olan P_n-dəki nöqtəni E_0, $\vec{e}_1 \to E_1, \dots, \vec{e}_n \to E_n$ ilə işarə edək. E_0, E_1, ..., E_n nöqtələrini P_n-in bazis nöqtələri adlandıracağıq. Əgər $\vec{x} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n$ olarsa, $\vec{x} = \{1,1,\dots,1\} \leftrightarrow E$. Deməli, $E_0(1,0,\dots,0), E_1(0,1,\dots,0), \dots, E_n(0,0,\dots,1)$. E(1,1,...,1) nöqtəsinə P_n-in vahid nöqtəsi deyilir.

Əgər (n+2) dənə E_0, E_1, ..., E_n, E nöqtəsi verilibsə, onda deyəcəyik ki, P_n-də proyektiv koordinat sistemi verilmişdir. Tutaq ki, n=1. E_0, E_1, E. Bu proyektiv düz xətdə koordinat sistemi olur.



Əgər n=2 olarsa, E_0, E_1, E_2, E. Ikiölçülü proyektiv müstəvi olur. $E_0E_1E_2$ üçbucağı koordinat üçbucağı adlanır.



n=3 olarsa, koordinat müstəvisi tetraedr olacaq və s.

P_n proyektiv fəzasında aşağdakı teorem doğrudur:

Teorem: Əgər iki dənə m və ℓ ölçülü müstəvilər verilmişdirsə, bu müstəvilərin kəsişməsini təşkil edən müstəvinin ölçüsü d, bu müstəvilərin doğurduğu müstəvinin ölçüsü s isə bu ölçülər arasında aşağıdakı kimi bərabərlik doğrudur:

$$m+\ell=s+d$$

Qeyd edək ki, d-kəsişməni ifadə edən müstəvinin maksimal ölçüsüdür, s-isə müstəvilərin yaratdığı müstəvinin minimal ölçüsüdür.

MÜHAZİRƏ 11

P_n-də kollineasiya çevirməsi

Proyektiv fəzanın (n+1) ölçülü afin fəzada modelinə əsasən proyektiv fəzanın kollineasiya çevirməsi (n+1) ölçülü afin fəzanın mərkəzi afin çevirməsinə deyilir.

Məlumdur ki, mərkəzi afin çevirmə aşağıdakı kimi yazılır.

$$\left.\begin{array}{l} `x^0 = a_0^0 x^0 + a_1^0 x^1 + \ldots + a_n^0 x^n \\ `x^1 = a_0^1 x^0 + a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n \\ ------------------ \\ `x^n = a_0^n x^0 + a_1^n x^1 + \ldots + a_n^n x^n \end{array}\right\}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0, i, j = \overline{0,n} \qquad (1)$$

Qısa olaraq, kollineasiya çevirməsini belə şəkildə də yaza bilərik:

$$`x^i = \sum_j a_j^i x^j \qquad (1')$$

və ya vektoru formada:

$$`\vec{x} = \mathrm{A}(\vec{x}) \qquad (1'')$$

Asanlıqla görünür ki, kollineasiya çevirməsi nöqtəvi və cırlaşmayan çevirmədir. Yoxlamaq olar ki, kollineasiya çevirməsi zamanı P_n-də bir düx xətt üzərində yerləşən 4 nöqtənin ikiqat nisbəti invariant qalır.

Qəbul edək ki, kollineasiya çevirməsi zamanı:

$$\vec{x} \to `\vec{x}$$
$$\vec{y} \to `\vec{y}$$
$$\vec{z} \to `\vec{z}$$
$$\vec{t} \to `\vec{t}$$

keçir. Kollineasiya çevirməsi nöqtəvi çevirmə olmaqla düz xətti düz xəttə çevirər, yəni bir düz xətt üzərində yerləşən 4 nöqtəni bir düz xətt üzərində yerləşən 4 nöqtəyə keçirər. İsbat edək ki,

$$W(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}) = W(`\vec{x}, `\vec{y}, `\vec{z}, `\vec{t})$$

Məlumdur ki, $\vec{z} = \vec{x} + k\vec{y}, \vec{t} = \vec{x} + \ell\vec{y}$ və $W(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}) = \ell k^{-1}$. $`\vec{z} = \mathrm{A}(\vec{z})$ olduğundan $= \mathrm{A}(\vec{x} + k\vec{y}) = \mathrm{A}(\vec{x}) + k\mathrm{A}(\vec{y}) = `\vec{x} + k`\vec{y}$ olar. Eyni qayda ilə, $`\vec{t} = \mathrm{A}(\vec{t}) = `\vec{x} + \ell`\vec{y}$ olar.

İkiqat nisbət $W(`\vec{x}, `\vec{y}, `\vec{z}, `\vec{t}) = \ell \cdot k^{-1}$ olacaq.

Yoxlamaq olar ki, (1) şəklində verilmiş kollineasiyalar çoxluğu qrup təşkil edirlər.

Kollineasiya çevirməsi cırlaşmayan olduğundan onun tərsi vardır. Əgər iki kollineasiyanın hasilini götürsək, hasilin determinantı determinantlar hasilinə bərabərdir. Yəni qəbul etsək ki, kollineasiyanın biri A – (a_{ij}), B – (b_{ij}) operatorları ilə verilərsə, bu iki kollineasiyanın hasilini ifadə edən C operatoru C=AB – ($a^i_j b^j_k$) matrisini ifadə edər və

$$Det(C) = Det(\mathrm{A}) \cdot Det(B);\ Det(\mathrm{A}) \neq 0, Det(B) \neq 0, Det(C) \neq 0.$$

Yəni iki kollineasiyanın hasili də kollineasiyadır.

Vahid kollineasiya vardır. Bu kollineasiya

$$(a^j_i) = (\delta^i_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

münasibəti ilə təyin olunur.

$$\left.\begin{aligned} `x^0 &= x^0 \\ `x^1 &= x^1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ `x^n &= x^n \end{aligned}\right\} \text{vahid kollineasiya çevirməsi}$$

Bunlara əsaslanaraq göstərə bilərik ki, (1) kollineasiyalar çoxluğu vurma əməlinə görə qrup təşkil edirlər.

Əgər (1) çevirməsilə bərabər

$$\left.\begin{aligned} \lambda`x^0 &= \lambda a^0_0 x^0 + \ldots + \lambda a^0_n x^n \\ &-------------- \\ \lambda`x^n &= \lambda a^n_0 x^0 + \ldots + \lambda a^n_n x^n \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

çevirməsinə də baxsaq, bunlar eyni bir kollineasiya çevirməsini ifadə edərlər.

Əgər (2) çevirməsinin matrisinin determinantını hesablasaq:

$$Det(\lambda a^i_j) = \lambda^{n+1} Det(a^i_j) \quad (3)$$

n-in tək və ya cüt olmasından asılı olaraq, λ^{n+1} ya müsbət, ya da mənfi ədəd ola bilər. Qəbul edək ki,

1. n təkdir $\Rightarrow n+1$ cütdür. Onda həmişə $\lambda^{n+1} > 0$. Bu halda λ^{n+1}-i elə seçək ki, $Det(\lambda a^i_j) = \pm 1$ olsun, yəni:

$$\lambda^{n+1} = \frac{1}{\left|Det(a^i_j)\right|} \quad (4)$$

2. n cüt, n+1 təkdir. $\lambda^{n+1} > 0$, $\lambda^{n+1} < 0$ ola bilər. Onda

$$\lambda^{n+1} = \frac{1}{Det(a_j^i)} \tag{5}$$

şəklində seçsək, onda $Det(\lambda a_j^i)$ yalnız ± 1 ola bilər.

Buradan alınır ki, P_n-də kollineasiyalar qrupu determinantı ± 1 olan alt qrupuna görə faktor qrupu ilə izomorfdur və yaxud deyirlər ki, n tək olduqda kollineasiyalar qrupu iki rabitəli; n cüt olduqda kollineasiyalar qrupu bir rabitəlidir.

MÜHAZİRƏ 12

P_n-də korrelyasiya çevirməsi

P_n-də kollineasiya çevirməsindən başqa aşağıdakı kimi tərif olunan korrelyasiya çevirməsi də vardır.

x^i proyektiv koordinatlı nöqtəni u_i tangensial koordinatlı hipermüstəviyə keçirək.

$$u_i = \sum_j a_{ij} x^j \tag{1}$$

çevirməsinə korrelyasiya çevirməsi deyilir.

Deməli, korrelyasiya çevirməsi nöqtəni hipermüstəviyə keçirən çevirmədir. Göstərmək olar ki, korrelyasiya çevirməsi zamanı düz xətt (n-2) ölçülü müstəviyə keçir.

Doğrudan da, $\vec{x}, \vec{y}$ nöqtələrindən keçən düz xəttin ixtiyari nöqtəsi bu nöqtələrin xətti kombinasiyasıdır və korrelyasiya hər bir nöqtəni hipermüstəviyə keçirdiyi üçün $\vec{x} + k\vec{y}$ müstəvisini qəbul edək ki, ω_i tangensial koordinatlı hipermüstəviyə keçirir. Bu hipermüstəvinin tənliyi $\sum_i \omega_i z^i = 0$ olsun, burada $z^i = x^i + ky^i \Rightarrow$

$$\sum_i \omega_i x^i + k \cdot \sum_i \omega_i y^i = 0 \tag{2}$$

(2) tənliyi ilə bərabər aşağıdakı tənliklər sisteminə baxaq:

$$\left.\begin{aligned} \sum_i \omega_i x^i &= 0 \\ \sum_i \omega_i y^i &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(3) tənliklər sisteminin hər bir həlli həm də (2) tənliyinin həllidir. (3) sistemindəki hər bir tənlik hipermüstəvini ifadə etdiyindən və hipermüstəvilərin hər birinin ölçüsü n-1 olduğundan, bu hipermüstəvilərin tənliklərinin (3) sistemindəki birgə baxılışı onların kəsişməsini ifadə edən (n-2) ölçülü müstəvini verər. Deməli, göstərdik ki, düz xəttin nöqtələri (n-2) ölçülü müstəvi boyunca kəsişən hipermüstəvilərə keçir. Başqa sözlə, korrelyasiya çevirməsi zamanı düz xətt (n-2) ölçülü müstəviyə keçər.

İndi ixtiyari m ölçülü müstəvinin korrelyasiya çevirməsi zamanı obrazını axtaraq. Sıfır ölçülü nöqtə korrelyasiya zamanı (n-1) ölçülü hipermüstəviyə keçir. Bu halda obrazla proobrazların ölçüləri cəmi 0+n-1=n-1 olur. Düz xətt (n-2) ölçülü müstəviyə keçir. Bu halda da, obrazla proobrazın ölçüləri cəmi 1+n-2=n-1 olur.

Qəbul edək ki, m ölçülü müstəvi korrelyasiya çevirməsi zamanı x ölçülü müstəviyə keçir. Əvvəlki hallara əsasən obrazla proobrazın cəmi $m+x=n-1$ olmalıdır $\Rightarrow x=n-m-1$.

Yəni, korrelyasiya çevirməsi zamanı m ölçülü müstəvi (n-m-1) ölçülü müstəviyə keçir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, korrelyasiya çevirmələr çoxluğu qrup təşkil etmir, yəni 2 ardıcıl aparılmış korrelyasiyanın hasili korrelyasiya verməz.

Ümumiyyətlə, göstərmək olar ki, hər bir korrelyasiyaya sadə bir korrelyasiyanın kollineasiyaya hasili kimi baxmaq olar.

MÜHAZİRƏ 13

P_n-də involyusyon kollineasiya

P_n fəzasının proyektiv çevirməsi dedikdə, həmin fəzanın kollineasiyalar və korrelyasiyalar çoxluğu nəzərdə tutulur. Hər bir fəzanın involyusyon çevirməsi o çevirmənin kvadratının eyni çevirmə verməsilə müəyyənləşir. İnvolyusyon kollineasiya da analoji olaraq təyin olunur, yəni kollineasiya çevirməsinin kvadratı eyni çevirmə verərsə, belə kollineasiya çevirməsinə involyusyon kollineasiya çevirməsi deyilir.

Məlumdur ki, P_n fəzasında eyni çevirmənin matrisinin normal Jordan formaları

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (1) \qquad \text{və} \qquad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

şəklində olar.

$$\left.\begin{aligned} `x^0 &= x^0 \\ `x^1 &= x^1 \\ &\dots\dots\dots \\ `x^n &= x^n \end{aligned}\right\} \quad (1') \qquad \left.\begin{aligned} `x^0 &= -x^0 \\ `x^1 &= -x^1 \\ &\dots\dots\dots \\ `x^n &= -x^n \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

(1) və (2) matrisləri P_n-də eyni çevirməni təyin edirlər.

Əgər kollineasiya çevirməsinin matrisinin normal Jordan formasını yazsaq:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

şəklində olar. Kollineasiyanın kvadratına uyğun olan matrisin normal Jordan forması isə aşağıdakı şəkildə olacaq:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

İnvolyusyonluğu görə (4) ya (1) ilə, ya da (2) ilə üst-üstə düşməlidir:

$$(4)=(1)\Rightarrow \lambda_i^2=+1 \qquad \qquad (4)=(2)\Rightarrow \lambda_i^2=-1$$

və ya

$$\lambda_i=\pm 1 \qquad \qquad \lambda_i=\pm i$$

Beləliklə, (3) matrisinin involyusyon kollineasiyanın çevirməsi olması üçün (3) aşağıdakı şəkildə olmalıdır:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad\quad}^{m+1} & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & \underbrace{\quad\quad}_{n-m} & & & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \qquad \text{və ya} \qquad \begin{pmatrix} i & & & & & & & \\ & i & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & i & & & & \\ & & & & -i & & & \\ & & & & & -i & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -i \end{pmatrix} \quad (6)$$

Əgər (5) matrisində ± 1-lərin sayı bərabərdirsə, belə involyusyon kollineasiyaya hiperbolik involyusyon kollineasiya deyəcəyik. ± 1-lərin sayı (5) matrisinin tərtibinin cüt olması halına uyğundur. Bu isə öz növbəsində tək ölçülü proyektiv fəzada mümkündür. Deməli, hiperbolik involyusyon kollineasiya tək ölçülü proyektiv fəzada mümkündür.

Əgər (5) matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

şəklində isə belə involyusyon kollineasiyaya homologiya deyilir.

Ümumiyyətlə, involyusyon kollineasiyanın matrisi (5) şəklində olduqda bir dənə m ölçülü və (n-m-1) ölçülü müstəvilər invariant qalırlar. Hiperbolik involyusyon kollineasiya zamanı (5) matrisi belə şəkildədir:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad\quad}^{\frac{n+1}{2}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\quad\quad}_{\frac{n+1}{2}} & & -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Hiperbolik involyusyon kollineasiya zamanı 2 dənə $\frac{n+1}{2}-1=\frac{n-1}{2}$ müstəvilər invariant qalır.

Əgər hiperbolik kollineasiyanın matrisi (6) şəklində olarsa, (6)-dakı $\pm i$-lərin sayı bərabər olmalıdır. Bu halda

$$\begin{pmatrix} \overbrace{i \quad\quad}^{\frac{n+1}{2}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & i & & & \\ & & & -i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\quad\quad}_{\frac{n+1}{2}} & & -i \end{pmatrix}$$

olmalıdır və 2 dənə $\frac{n-1}{2}$ ölçülü qoşma xəyali müstəvilər invariant qalırlar. Belə (6) matrisli involyusyon kollineasiya elliptik involyusyon kollineasiya adlanır. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, elliptik involyusyon kollineasiya yalnız tək ölçülü proyektiv fəzada mümkündür. Parabolik involyusyon kollineasiya elliptik və ya hiperbolik involyusyon kollineasiyanın limit vəziyyəti kimi təyin olunur.

MÜHAZİRƏ 14

P_n-də simmetriya obrazları

Hər bir fəzanın simmetriya obrazları o fəzanın, kvadratı eyni çevirmə verən çevirməsilə müəyyən olunur. Proyektiv fəzada da proyektiv çevirmənin kvadratı eyni çevirmə verərsə, o çevirməyə involyusyon çevirmə deyilir və involyusyon çevirmə zamanı invariant qalan obyektlərə fəzanın simmetriya obrazları deyilir.

Proyektiv fəzanın çevirmələri dedikdə kollineasiya, korrelyasiyalar nəzərdə tutulur. Deməli, proyektiv fəzada involyusyon kollineasiya və ya korrelyasiya zamanı invariant qalan obyektlər həmin fəzanın simmetriya obrazları olacaqdır.

Proyektiv fəzanın simmetriya obrazlarını axtarmaq üçün involyusyon kollineasiya və korrelyasiya çevirmələrinin matrislərinin normal Jordan formalarını xatırlayaq. Məlumdur ki, involyusyon kollineasiyanın matrisi

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{m+1} & \\ & \underbrace{\begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix}}_{n-m} \end{pmatrix} \quad (1) \qquad \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{\frac{n+1}{2}} & \\ & \underbrace{\begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix}}_{\frac{n+1}{2}} \end{pmatrix} \quad (2) \qquad \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}i & & \\ & \ddots & \\ & & i\end{matrix}}^{\frac{n+1}{2}} & \\ & \underbrace{\begin{matrix}-i & & \\ & \ddots & \\ & & -i\end{matrix}}_{\frac{n+1}{2}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

şəkillərində olur. Matrisi (2) və (3) şəklində olan involyusyon kollineasiyalara uyğun olaraq hiperbolik və elliptik involyusiyalar deyilir. Bazisi seçmək hesabına (2) və (3) matrislərini uyğun olaraq aşağıdakı şəkillərə gətirmək olar.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} (2') \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix} (3')$$

Doğrudan da, $(2')$ və $(3')$ matrislərində olan şəbəkə matrislərinin xarakteristik tənliyini yazsaq, xarakteristik köklər uyğun olaraq:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \pm i$$

olar. Başqa sözlə desək, (2′), (3′) matrislərinin normal Jordan formaları elə (2), (3) şəklində olur.

(2′)-ə uyğun olan çevirmə:

$$\left.\begin{aligned} `x^{2i} &= x^{2i+1} \\ `x^{2i+1} &= x^{2i} \end{aligned}\right\} \qquad (2'')$$

və ya $\left.\begin{aligned} `x^0 &= x^1 \\ `x^1 &= x^0 \end{aligned}\right\}$ və ya $\left.\begin{aligned} `x^0 &= 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 \\ `x^1 &= 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 \end{aligned}\right\}$ olur.

(3′)-ə uyğun çevirmə:

$$\left.\begin{aligned} `x^{2i} &= x^{2i+1} \\ `x^{2i+1} &= -x^{2i} \end{aligned}\right\} \qquad (3'')$$

Deməli, hiperbolik və elliptik involyusiyaların çevirmələri (2″) və (3″) şəklində olar.

Xüsusi hallara baxaq. Qəbul edək ki, fəzanın ölçüsü 1-dir, yəni P_1. P_1-də korrelyasiya çevirmələrindən söhbət aparmağa dəyməz.

Əgər involyusyon kollineasiyanın matrisini yazsaq, bu matris belə şəkillərdə olacaq:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad 3)\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad 4)\begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix} \quad 5)\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \quad 6)\begin{pmatrix} -i & \\ & -i \end{pmatrix}$$

1), 3), 5) və 6) matrisləri P_1-in eyni çevirmələrini ifadə edən matrislərdir. Eyni çevirmə zamanı fəza tam invariant qaldığı üçün fəzanın simmetriya obrazlarının sayı qeyri-müəyyən olur. Belə qeyri-müəyyənliyi aradan qaldırmaq üçün fəzanın simmetriya obrazlarını axtardıqda o fəzanın eyni çevirmələrinə baxmayacağıq. Ona görə də, P_1-in simmetriya obrazlarını axtarmaq üçün involyusyon matrisin 2) və 4) şəkillərini götürmək lazımdır. 2) matrisi nəticəsində yoxlamaq olar ki, 1 cüt həqiqi nöqtə; 4) matrisi nəticəsində 1 cüt xəyali nöqtə invariant qalır.

***Nəticə*:** P_1-in simmetriya obrazları 2 həqiqi, 2 xəyali qoşma nöqtələrdən ibarətdir.

P_2 halına baxaq. P_2-də involyusyon kollineasiya çevirməsinin matrisi belə olar (eyni çevirmələri nəzərə almasaq):

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Deməli, bir e_0, e_1-dən keçən düz xətt və e_3 nöqtəsi invariant qalacaq. P_2-də involyusyon korrelyasiya da mümkündür. P_2-də polyaritetin tənliyi:

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$$

Bu polyaritetin çevirməsini belə də yaza bilərik:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= x^0 \\ u_1 &= x^1 \\ u_2 &= -x^2 \end{aligned}\right\}$$

$u_0 x^0 + u_1 x^1 + u_2 x^2 = 0$ polyaranın tənliyidir. Belə polyaritet zamanı polyus öz polyarası üzərində yerləşir. Polyus polyaraya avtopolyar cütlər deyilir. Deməli, P_2-nin simmetriya obrazları e_0e_1 düz xətti, e_3 nöqtəsi və bu nöqtədən keçən e_0e_1-i kəsən düz xətlər çoxluğu və avtopolyar cütlərdir.

Deməli, ümumiyyətlə, P_n fəzasının simmetriya obrazları nöqtələr, düz xətlər, avtopolyar cütlər, simplekslər, düz xətlər konqruensiyalarından ibarətdirlər. Ümumiyyətlə, P_n fəzasında simmetriya obrazları m ölçülü və (n-m-1) ölçülü müstəvilər və bu müstəvilərin nöqtələrini birləşdirən düz xətlər konqruensiyası; $\frac{n-1}{2}$ ölçülü 2 dənə həqiqi müstəvilər və bu müstəvilərin nöqtələrini birləşdirən hiperbolik düz xətlər konqruensiyası; 2 dənə $\frac{n-1}{2}$ ölçülü xəyali qoşma müstəvilər, bu müstəviləri birləşdirən elliptik düz xətlər konqruensiyası və bu müstəvilərin birini digərinə yaxınlaşdırdıqda limit vəziyyəti kimi alınan parabolik düz xətlər konqruensiyalarıdır. Parabolik düz xətlər konqruensiyasını hiperbolik düz xətlər konqruensiyasından, eyni qayda ilə elliptik düz xətlər konqruensiyasından limitə keçməklə almaq olar.

MÜHAZİRƏ 15

Qeyri-Evklid fəzalarının proyektiv modelləri

$$u_i = \sum_j a_{ij} x^j, (a_{ij} = a_{ji})$$

polyariteti verilmiş P_n proyektiv fəzasına $S_n, {}^{\ell}S_n$ qeyri-Evklid fəzaları deyəcəyik.

Məlumdur ki, polyaritetin verilməsilə

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x^i x^j = 0 \qquad (1)$$

şəklində cırlaşmayan II tərtib səth (kvadrika) verilir və bazisləri seçmək hesabına bu kvadrikanın tənliyini aşağıdakı şəkillərdən birinə gətirmək olur:

$$\sum_i (x^i)^2 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_i \varepsilon_i (x^i)^2 = 0 \qquad (3)$$

$\varepsilon_i = \pm 1$; -1-lərin sayı ℓ dənədir. (2) tənliyilə təyin olunan kvadrika xəyali, (3) ilə təyin olunan kvadrika həqiqidir.

Deməli, $S_n, {}^{\ell}S_n$ qeyri-Evklid fəzaları (2), (3) şəklində verilmiş kvadrikalı P_n proyektiv fəzasına deyilir. Əgər P_n fəzasında (2) kvadrikası verilmişdirsə, belə P_n fəzasına S_n qeyri-Evklid fəzası; əgər P_n fəzasında (3) kvadrikası verilmişdirsə, belə P_n fəzasına ${}^{\ell}S_n$ qeyri-Evklid fəzası deyəcəyik. (2), (3) kvadrikalarına uyğun olaraq $S_n, {}^{\ell}S_n$ qeyri-Evklid fəzalarının absolyutları deyilir.

S_n fəzası halında əgər $\sum_i (x^i)^2 > 0$ ödənilərsə, bu şərti ödəyən nöqtələr çoxluğuna S_n fəzasının məxsus nöqtələr çoxluğu və ya məxsus oblastı deyilir. Məlumdur ki, S_n fəzasında yalnız məxsus nöqtələr var.

${}^{\ell}S_n$ fəzası halında $\sum_i \varepsilon_i (x^i)^2 > 0, \frac{1}{r^2} > 0$ olarsa, belə nöqtələr çoxluğuna ${}^{\ell}S_n$-in məxsus oblastı deyilir.

Əgər $\sum_i \varepsilon_i (x^i)^2 < 0, \frac{1}{r^2} > 0$ olarsa, belə nöqtələr çoxluğuna ${}^{\ell}S_n$-in ideal oblastı deyilir. Əgər $\sum_i \varepsilon_i (x^i)^2 < 0, \frac{1}{r^2} < 0$ və $\sum_i \varepsilon_i (x^i)^2 > 0, \frac{1}{r^2} < 0$ şərtlərini ödəyirsə, uyğun olaraq, ${}^{\ell}S_n$ fəzasının məxsus və ideal oblastları şərtlərini alarıq.